

MT システムの中の T 法（1）＝両側 T 法の説明

原料配合による強度の推定問題

1953年のINAX社が行ったタイルの配合による寸法安定化のパラメータ設計の事例は有名である。

この事例は、新規に開発する場合には、直交表を用いて体系だったパラメータ設計で最適条件を求めることができるが、今までに配合実験で少しずつ改良を加えてきた場合には、蓄積されたデータを用いて検討すれば新たな実験や時間を削減することができる。

1. 原料配合問題の概要と目的

製品は図1に示されるように、5種類の原料と2種類の添加剤を配合、混合、加工して作られている。この実験の目的は、原料の配合割合から製品の引張り強度を推定したいのである。

原料の配合と強度のデータは表1に示す。表のデータは全体を100%としたときの重量比（%）を示している。

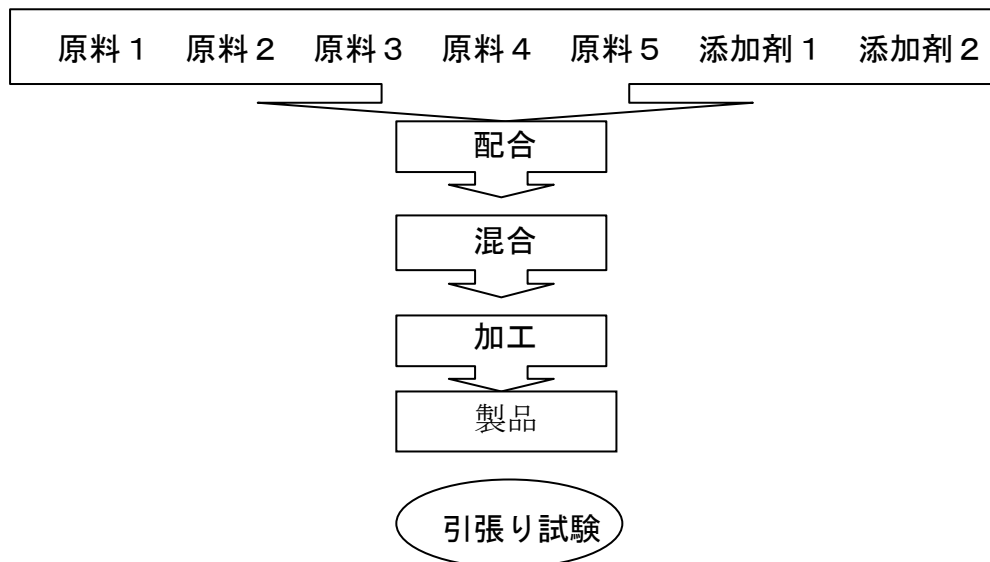


図1 原料配合と加工工程

表 1 原料の配合割合（重量比%）と強度（MPa）

No.	原料 1	原料 2	原料 3	原料 4	原料 5	添加剤 1	添加剤 2	強 度
1	34.27	7.10	20.08	24.30	9.48	1.17	3.60	49.77
2	26.78	21.71	15.23	23.84	7.00	1.74	3.70	53.73
3	17.01	26.04	19.65	23.16	9.41	1.12	3.60	54.10
4	23.77	22.25	15.40	25.67	7.00	2.21	3.70	54.29
5	22.11	21.71	19.91	23.84	7.00	1.74	3.70	56.27
6	22.14	30.49	11.15	23.88	7.00	1.74	3.60	56.45
7	22.11	21.71	19.91	23.84	7.00	1.74	3.70	59.14
8	20.81	21.05	19.25	26.56	7.00	1.63	3.69	59.89
9	12.18	31.64	19.91	23.84	7.00	1.74	3.70	60.59
10	19.66	23.15	21.35	22.75	7.00	2.37	3.71	61.51

2. 単位空間の定義

表 1 の全データの中で、強度が平均値の近傍にある No.5, No.6 の 2 つのデータを単位空間のメンバーとし、各項目と強度について、2 つのデータの平均値を求めて、表 2 に示した。

表 2 単位空間のメンバーと各項目・出力の平均値

メンバー	原料 1	原料 2	原料 3	原料 4	原料 5	添加剤 1	添加剤 2	強 度
5	22.11	21.71	19.91	23.84	7.00	1.74	3.70	56.27
6	22.14	30.49	11.15	23.88	7.00	1.74	3.60	56.45
平均値	22.13	26.10	15.53	23.86	7.00	1.74	3.65	56.36

3. 信号データの定義

全データの中のうち、単位空間の 2 つのデータをのぞいて、残り 8 つのデータを信号のメンバーとした。これを表 3 に示す。

表3 信号データ

メンバー	原料1	原料2	原料3	原料4	原料5	添加剤1	添加剤2	強度
1	34.27	7.10	20.08	24.30	9.48	1.17	3.60	49.77
2	26.78	21.71	15.23	23.84	7.00	1.74	3.70	53.73
3	17.01	26.04	19.65	23.16	9.41	1.12	3.60	54.10
4	23.77	22.25	15.40	25.67	7.00	2.21	3.70	54.29
7	22.11	21.71	19.91	23.84	7.00	1.74	3.70	59.14
8	20.81	21.05	19.25	26.56	7.00	1.63	3.69	59.89
9	12.18	31.64	19.91	23.84	7.00	1.74	3.70	60.59
10	19.66	23.15	21.35	22.75	7.00	2.37	3.71	61.51

4. 信号データの規準化

信号メンバーの個々のデータについて、表2の単位空間の各項目・強度の平均値を引いて規準化する。規準化したデータを表4に示す。

表4 規準化した信号データ

メンバー	原料1 (X1)	原料2 (X2)	原料3 (X3)	原料4 (X4)	原料5 (X5)	添加剤1 (X6)	添加剤2 (X7)	強度 (M)
1	12.15	-19.00	4.55	0.44	2.48	-0.56	-0.05	-6.59
2	4.66	-4.39	-0.30	-0.02	0.00	0.00	0.05	-2.63
3	-5.12	-0.05	4.12	-0.70	2.41	-0.62	-0.05	-2.26
4	1.64	-3.85	-0.12	1.81	0.00	0.47	0.05	-2.07
7	-0.01	-4.39	4.38	-0.02	0.00	0.00	0.05	2.78
8	-1.32	-5.05	3.73	2.70	0.00	-0.11	0.05	3.53
9	-9.95	5.54	4.38	-0.02	0.00	0.00	0.05	4.23
10	-2.47	-2.94	5.83	-1.11	0.00	0.63	0.06	5.15

5. 信号データの比例定数とSN比の算出

表4の項目ごとの比例定数 β とSN比 η を算出する。

メンバー	項目1	項目2	...	項目k	出力
1	X_{11}	X_{12}		X_{1k}	M_1
2	X_{21}	X_{22}		X_{2k}	M_2
.
.
l	X_{l1}	X_{l2}		X_{lk}	M_l

$$\text{比例定数 } \beta_1 = \frac{(M_1 X_{11}) + (M_2 X_{21}) + \dots + (M_l X_{l1})}{r}$$

$$\text{SN 比 } \begin{cases} \eta_1 = \frac{\frac{1}{r}(S_{\beta 1} - V_{e1})}{V_{e1}} & (S_{\beta 1} > V_{e1}) \\ \eta_1 = 0 & (S_{\beta 1} \leq V_{e1}) \end{cases}$$

$$\text{有効除数 } r = (M_1)^2 + (M_2)^2 + \dots + (M_l)^2$$

$$\text{全変動 } S_{T1} = X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{l1}^2 \quad (f = l)$$

$$\text{比例項の変動 } S_{\beta 1} = \frac{(M_1 X_{11} + M_2 X_{21} + \dots + M_l X_{l1})^2}{r}$$

$$\text{誤差変動 } S_{e1} = S_{T1} - S_{\beta 1} \quad (f = l - 1)$$

$$\text{誤差分散 } V_{e1} = \frac{S_{e1}}{l - 1}$$

である。

表 5 項目ごとの比例定数 β と SN 比 η

β, η	原料 1	原料 2	原料 3	原料 4	原料 5	添加剤 1	添加剤 2	強度
比例定数 β	-1.155	0.990	0.286	-0.010	-0.175	0.057	0.008	0.008
SN 比 η	0.059	0.011	0.000	0.000	0.018	0.016	0.016	0.030

6. 信号のメンバーの総合推定値の算出

項目ごとの比例定数 β と SN 比を用いて、信号のメンバーごとに強度の総合推定値を求める。

信号の i 番目のメンバーの強度の総合推定値 \hat{M}_i は下式で求める。

$$\begin{aligned} \hat{M}_i &= \frac{\eta_1 \times \frac{X_{i1}}{\beta_1} + \eta_2 \times \frac{X_{i2}}{\beta_2} + \eta_3 \times \frac{X_{i3}}{\beta_3} + \eta_4 \times \frac{X_{i4}}{\beta_4} + \eta_5 \times \frac{X_{i5}}{\beta_5} + \eta_6 \times \frac{X_{i6}}{\beta_6} + \eta_7 \times \frac{X_{i7}}{\beta_7}}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 + \eta_7} \\ &= \frac{0.059 \times \frac{X_{i1}}{(-1.155)} + 0.011 \times \frac{X_{i2}}{0.990} + 0 + 0 + 0.018 \times \frac{X_{i5}}{(-0.175)} + 0.016 \times \frac{X_{i6}}{0.057} + 0.030 \times \frac{X_{i7}}{0.008}}{0.059 + 0.011 + 0 + 0 + 0.018 + 0.016 + 0.030} \end{aligned}$$

総合推定の計算式から、SN 比が大きい項目ほど、強度の総合推定に寄与する

度合いが大きいことが分かる。ちなみに、原料3と原料4のSN比はゼロとするので、結果として総合推定に使わないことになる。

表4の規準化した信号の第一番目メンバーの総合推定値を計算してみる。

$$\begin{aligned}\hat{M}_i &= \frac{0.059 \times \frac{12.15}{(-1.155)} + 0.011 \times \frac{-19.00}{0.990} + 0 + 0 + 0.018 \times \frac{2.48}{(-0.175)} + 0.016 \times \frac{-0.56}{0.057} + 0.030 \times \frac{-0.05}{0.008}}{0.059 + 0.011 + 0 + 0 + 0.018 + 0.016 + 0.030} \\ &= \frac{-0.622 - 0.214 + 0 + 0 - 0.260 - 0.160 - 0.182}{0.134} = -10.71\end{aligned}$$

7. 総合推定のSN比の算出

表4の信号データの強度の真値 M と総合推定値 \hat{M} から、総合推定のSN比を計算する手順を以下に示す。

表6 信号データにおける強度の実測値（真値） M と総合推定値 \hat{M}

メンバー	実測値（真値）	総合推定値 \hat{M}
1	-6.59	-10.71
2	-2.63	-0.80
3	-2.26	-2.58
4	-2.07	1.44
7	2.78	0.99
8	3.53	1.09
9	4.23	5.61
10	5.15	3.59

線形式
$$L = M_1 \hat{M}_1 + M_2 \hat{M}_2 + \dots + M_l \hat{M}_l$$

$$= (-6.59)(-10.71) + (-2.26)(-2.58) + \dots + 5.15 \times 3.59 = 124.3422$$

有効除数
$$r = M_1^2 + M_2^2 + \dots + M_l^2$$

$$= (-6.59)^2 + (-2.63)^2 + \dots + 5.15^2 = 124.3422$$

全変動
$$S_T = \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + \dots + \hat{M}_l^2$$

$$= (-10.71)^2 + (-0.80)^2 + \dots + 3.59^2 = 170.5354 \quad (f = 8)$$

比例項の変動

$$S_\beta = \frac{L^2}{r} = \frac{124.3422^2}{124.3422} = 124.3422 \quad (f = 1)$$

誤差変動
$$S_e = S_T - S_\beta = 170.5354 - 124.3422 = 46.1932 \quad (f = 7)$$

$$\text{誤差分散 } V_e = \frac{S_e}{l-1} = \frac{46.1932}{7} = 6.5990$$

SN 比

$$\eta = 10 \log \left[\frac{\frac{1}{r}(S_\beta - V_e)}{V_e} \right] = 10 \log \left[\frac{\frac{1}{124.3422}(124.3422 - 6.5990)}{6.5990} \right] = -8.43(\text{db})$$

8. 項目の重要度の評価

(1) 直交表 L₁₂ への各項目のわりつけ

本事例では項目が7個あるので、直交表 L₁₂ に割りつけて、項目の重要度の評価を行う。実験 No.1 では、7項目すべてが第1水準なので、7項目全部を用いることを示している。

表7 直交表への各項目の割り付けと総合推定の SN 比

No.	原料 1	原料 2	原料 3	原料 4	原料 5	添加 剤 1	添加 剤 2	e	e	e	e	総合推定の SN 比 η (db)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-8.43
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	-11.24
3	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2	-8.37
4	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	2	-9.25
5	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	1	-8.45
6	1	2	2	2	1	2	2	1	1	1	1	-9.82
7	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	-15.10
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2	-19.53
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	-11.31
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	-13.96
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	-13.46
12	2	2	1	1	2	1	2	1	1	2	1	-17.96

注) 第1水準は項目を使用する。第2水準は項目を使用しない。

9. 直交表の実験番号ごとの総合推定のSN比の算出

7項の手順から、直交表の実験番号ごとに総合推定のSN比を求め、表7の総合推定のSN比を示す。

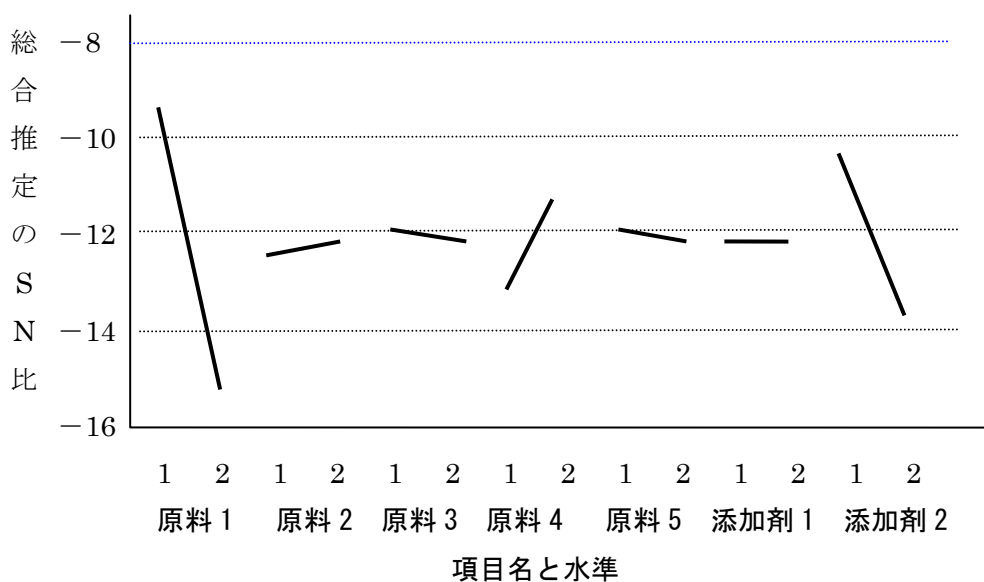
10. 総合推定のSN比の要因効果図の作成

表7から、総合推定のSN比の補助表を求めて、表8を作成する。

さらに、補助表から図2の要因効果図を作成する。図より原料1，添加剤2の配合比が製品強度に大きく関与していることが分かる。

表8 総合推定のSN比の補助表（水準別平均値）

項目	第1水準	第2水準
原料1	-9.31	-15.22
原料2	-12.33	-12.20
原料3	-11.99	-12.54
原料4	-13.26	-11.27
原料5	-12.00	-12.53
添加剤1	-12.22	-12.30
添加剤2	-10.67	-13.86



第1水準：項目を使用する。第2水準：項目を使用しない。

図2 7項目の要因効果図

1 1. 最適条件の推定

ケース 1 : 表 5 で SN 比が正であった項目, すなわち, 原料 1, 原料 2, 原料 5, 添加剤 1, 添加剤 2

ケース 2 : 図 2 で総合 SN 比が「右下がり (第 1 水準の方が第 2 水準より大きい)」となった項目, すなわち, 原料 1, 原料 5, 添加剤 2

ケース 2 について, 表 6 で求めたように, 信号メンバー (1~4, 7~10) に対して, 強度の総合推定値 \hat{M} を求めて, 強度の真値 (実測値) M とともに表 9 に示した。

ケース 1 とケース 2 の総合推定の SN 比を 7 項で示した方法で計算するとケース 2 の方が 0.99db 大きくなった。(表 10) したがって, ケース 2 を最適条件 とした。

表 9 ケース 2 における強度の実測値 M と総合推定値 \hat{M}

メンバー	実測値 (真値)	総合推定値 \hat{M}
1	-6.59	-9.93
2	-2.63	-0.53
3	-2.26	-1.61
4	-2.07	0.97
7	2.78	1.70
8	3.53	2.18
9	4.23	6.45
10	5.15	3.14

表 10 総合推定の SN 比の比較

ケース	使用した項目 (配合比)	総合推定の SN 比 (db)
(1)	原料 1, 原料 2, 原料 5, 添加剤 1, 添加剤 2	-8.34
(2)	原料 1, 原料 5, 添加剤 2	-7.44

1 2. 未知データの総合推定値の算出

強度が未知データ 2 件 (表 11) が新規に得られた。最適条件 (原料 1, 原料 5, 添加剤 2) の配合比を使用した時の強度の総合推定を行う。

未知データ (1) (2) についても, これまでと同様に単位空間の各項目の平均値を引いて規準化を行う。その結果を表 12 に示す。

表 12 の規準化した未知データについて, 信号データと同様に 6 項の計算式を用いて総合推定値 \hat{M} を求めると, 次のようになる。

表 1 1 未知データ

No.	原料 1	原料 2	原料 3	原料 4	原料 5	添加剤 1	添加剤 2	強度
(1)	23.77	22.25	15.40	25.67	7.00	2.21	3.70	未知
(2)	17.44	21.71	24.58	23.84	7.00	1.74	3.70	未知

表 1 2 規準化した未知データ

No.	原料 1	原料 2	原料 3	原料 4	原料 5	添加剤 1	添加剤 2	強度
(1)	1.64	-3.85	-0.12	-0.02	0.00	0.47	0.05	未知
(2)	-4.69	-4.39	9.05	-0.02	0.00	0.00	0.05	未知

$$\hat{M}_{(1)} = \frac{0.059 \times \frac{1.64}{(-1.155)} + 0.018 \times \frac{0}{(-0.175)} + 0.030 \times \frac{0.05}{0.008}}{0.059 + 0.018 + 0.030} = \frac{-0.084 + 0 + 0.182}{0.107} = 0.97$$

$$\hat{M}_{(2)} = \frac{0.059 \times \frac{(-4.69)}{(-1.155)} + 0.018 \times \frac{0}{(-0.175)} + 0.030 \times \frac{0.05}{0.008}}{0.059 + 0.018 + 0.030} = \frac{0.240 + 0 + 0.182}{0.107} = 3.94$$

1.3. 規準化前（実際）の総合推定値の算出

規準化前（実際）の強度の総合推定値 \hat{y} は、規準化した総合推定値 \hat{M} に単位空間の平均値 M_0 ($=56.36\text{MPa}$) を加えて求める。

$$\hat{y} = \hat{M} + M_0 = \hat{M} + 56.36 \quad (\text{MPa})$$

その後、未知データの強度の真値（実測値） y がわかったので、総合推定値 \hat{y} とともに表 1.3 に示す。

表 1.3 信号データおよび未知データの強度の実測値 y と総合推定値 \hat{y}

データ No.	実測値 (y)	総合推定値 (\hat{y})		
信号データ	1	49.77	46.43	
	2	53.73	55.83	
	3	54.10	54.75	
	4	54.29	57.33	
	7	59.14	58.06	
	8	59.89	58.54	
	9	60.59	62.81	
	10	61.51	59.50	
	未知データ	(1)	56.40	57.33
		(2)	63.11	60.30

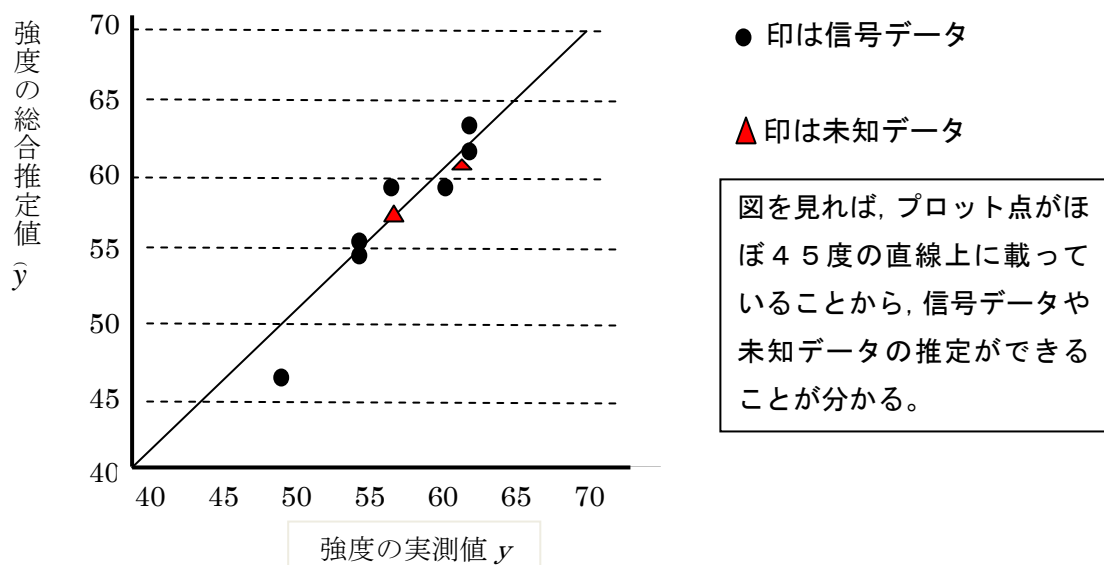


図 3 強度の実測値 y と総合推定値 \hat{y} の散布図

1 4. 原料配合問題のまとめ

目的特性は引張り強度だけでなく、曲げ強度や衝撃強度など目的に応じて必要な特性があるので、それぞれの特性について、単位空間を定義して引張り強度と同じように最終的な配合を決めることになる。

出典は「入門 MT システム」日科技連 立林和夫編 手島昌一 長谷川良子著
第 6 章 適用事例から引用